

I.2 Transformée en ondelettes

Le terme *ondelette* désigne une fonction qui oscille pendant un “ temps donné” (si la variable est le temps) ou sur un intervalle de longueur finie (si la variable est de type spatial). Au delà, la fonction décroît très vite vers zéro.

Principalement les ondelettes sont utilisées pour la décomposition de fonctions. La décomposition d'une fonction en ondelettes consiste à l'écrire comme une somme pondérée de fonctions obtenues à partir d'opérations simples effectuées sur une fonction principale appelée *ondelette-mère*. Ces opérations consistent en des translations et dilatations de la variable. Selon que ces translations et dilatations sont choisies de manière continue ou discrète, on parlera d'une transformée en ondelettes continue ou discrète.

I.2.1 Transformée en ondelettes continue

Une transformée en ondelettes est dite continue lorsque les paramètres structurels des fonctions utilisées (c'est-à-dire les translations et les dilatations) peuvent prendre n'importe quelle valeur de l'ensemble des réels R (les dilatations doivent néanmoins être positives).

Les ondelettes ont été introduites par Grossmann et Morlet [21] comme une famille des fonctions $\Psi_{a,b}$ de $L^2(R)$. elles sont générées par translations et dilatations d'une fonction de base d'énergie finie (appartient à $L^2(R)$) appelée ondelette mère y .

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{a^{1/2}} \psi\left(\frac{1}{a}(x-b)\right) \quad (a,b) \in R^2 \quad (1.1)$$

Les coefficients a et b désignent respectivement le facteur d'échelle pour la dilatation de y , et les coefficients de translation.

Si la fonction $\psi(x)$ est intégrable et suffisamment oscillante pour être d'intégrale nulle :

$$\int \psi(x) dx = 0 \quad (1.2)$$

La transformée en ondelettes continues (CWT) d'une fonction f est définie par:

$$W_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle \quad (1.3)$$

Où le symbole $\langle \cdot \rangle$ correspond au produit scalaire dans $L^2(R)$.

Si l'ondelette ψ satisfait la condition d'admissibilité

$$C_\psi = \int \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad (1.4)$$

Alors la transformée ondelette continue $W(a, b)$ admet une inverse

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} W_f(a, b) \psi_{a,b}(x) \frac{da}{a^2} db \quad (1.5)$$

D'après la condition d'admissibilité, nous voyons que $\hat{\psi}(0) = 0$ et par conséquent, ψ doit osciller, d'où son appellation "ondelette".

Nous remarquons que la CWT convertie une fonction à une variable en une fonction à deux variables. La représentation d'une fonction par sa CWT est redondante et la transformée inverse n'est pas toujours unique. De plus, toutes les fonctions $W(a, b)$ ne sont pas forcément la CWT de la fonction f .

L'avantage de cette caractérisation par rapport à la transformée de Fourier est qu'elle ne donne pas seulement une information sur le type de singularité mais aussi sa localisation dans le temps.

I.2.2 Transformée en ondelettes discrète DWT

Dans le cas discret, nous choisissons de restreindre les valeurs des paramètres a et b à une grille discrète. Dans ce cas nous fixons un pas de dilatation $a_0 > 1$ et $b_0 > 0$ et en posant $a = a_0^m$ et $b = nb_0 a_0^m$ avec m et $n \in \mathbb{Z}$. Les bases d'ondelettes sont définies par les fonctions [29].

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}x - nb_0) \quad (1.6)$$

Par suite, la décomposition en ondelettes et la transformée inverse sont déterminées par les équations suivantes :

$$W_f(m, n) = \langle f, \psi_{m,n} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_{m,n}^*(x) dx \quad (1.7)$$

$$f = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} W_f(m, n) \psi_{m,n} \quad \text{cover dans } L^2(\mathbb{R}) \quad (1.8)$$

Ainsi, la transformée en ondelettes associée à la fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ un ensemble discret de coefficient $W_f(m, n)$.

Yves Meyer [31] a construit une transformée en ondelettes dyadique pour laquelle $a_0=2$ et $b_0=1$, a montré que pour des fonctions particulières y de $L^2(\mathbb{R})$, la famille :

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}x - n) \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad (1.9)$$

$\psi_{m,n}$ Constitue une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$

I.2.3 Propriétés des ondelettes de première génération

Les ondelettes de première génération satisfont les propriétés suivantes :

- Les ondelettes forment une base de Riesz de $L^2(R)$.
- Les ondelettes sont soit orthogonales soit leur duales sont connues (dans le cas où elles sont biorthogonales).
- Les ondelettes et leurs duales sont localisées en temps-échelle. La localisation en échelle provient de leur régularité et de leurs moments polynomiaux nuls.
- La transformation en ondelettes rapide permet d'obtenir les coefficients d'ondelettes en un temps linéaire. [5]

I.3 L'analyse multi résolution

La méthode d'analyse multirésolution est une structure mathématique formalisée par Meyer et Mallat sur l'axe réel fini [28, 29, 30, 52]. En ce sens, les ondelettes offrent un outil efficace. L'idée principale de l'analyse multirésolution est de représenter hiérarchiquement une fonction par une partie de basse résolution plus simple avec les coefficients d'ondelettes qui sont nécessaires pour retrouver la fonction originale. [15]

I.3.1 Cadre théorique

La notion d'analyse multirésolution par ondelettes d'une fonction $f \in L^2(R)$ consiste en sa projection sur des bases de fonctions, donnant des approximations de moins en moins fines de la fonction originale.

Une suite $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés de $L^2(R)$ est une approximation multirésolution si elle vérifie les propriétés suivantes: [5, 18]

1- V_j est invariant par translation de longueur $2^j k$

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j \quad (1.10)$$

2- propriété de causalité : les espaces $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ définissent une suite d'espaces emboîtés.

$$V_{k+1} \subset V_k \quad (1.11)$$

3- les détails entre V_{j+1} et V_j sont accrus d'un facteur 2.

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t/2) \in V_{j+1} \quad (1.12)$$

4- L'intersection des espaces emboîtés ne contient que l'élément nul.

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j \rightarrow -\infty}^{+\infty} V_j = \{0\} \quad (1.13)$$

5- L'union des espaces emboîtés $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est dense dans $L^2(R)$. en d'autre terme, l'adhérence de cette union s'identifie à l'espace $L^2(R)$.

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \overline{\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} V_j} = L^2(R) \quad (1.14)$$

6- il existe f tel que $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz

La condition (6) implique qu'une base orthonormée de V_j peut se déduire de la base de V_0 à partir d'une seule fonction $\phi(t)$, la fonction d'échelle, en construisant la famille :

$$\phi_{j,n}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - n) \quad (1.15)$$

Puisque nous travaillons dans des espaces emboîtés, n'importe quelle fonction dans V_j peut s'écrire comme combinaison linéaire des fonctions dans V_{j-1} . En particulier $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$, et par la suite l'existence d'une séquence $h \in L^2(R)$ telle que

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \phi(2t - n) \quad (1.16)$$

Où les $h(n)$ sont les coordonnées de $\phi(t)$ dans la base $\{\sqrt{2}\phi(2t-k), k \in \mathbb{Z}\}$, ou encore les coefficients du filtre discret grossier. Ces $h(n)$ vérifient les deux propriétés suivantes, pour une base orthonormée :

$$h(n) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(2t - n) \quad \text{avec} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h^2(n) = 1 \quad (1.17)$$

Mallat associe le concept d'analyse multirésolution et la théorie des ondelettes en considérant les ondelettes comme des fonctions contenant les détails nécessaires pour passer d'une résolution grossière à une résolution plus fine.

Le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1} est défini par l'espace vectoriel W_j

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

Les ondelettes $(\psi_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ appartiennent à l'espace W_j . Sous certaines conditions, elles constituent une base orthonormée de W_j , la projection orthogonale d'une fonction f sur V_{j+1} peut s'écrire :

$$proj_{V_{j-1}}(f) = proj_{V_j}(f) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} Wf(j, n) \quad (1.18)$$

L'ondelette associée à cette analyse multi résolution est déterminée par l'existence d'une séquence $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) \phi(2t - n)$$

La condition d'orthogonalité sur les espaces V_j et W_j permettent de mettre la relation entre les deux séquences $h(n)$ et $g(n)$ [13]

$$g(n) = (-1)^n h(-n+1)$$

L'analyse multirésolution biorthogonale est définie à l'aide des deux espaces $\{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\{\tilde{V}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Les fonction d'échelle associés $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{\phi}_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constituent les deux bases non orthogonales des espace d'approximation V_k et \tilde{V}_k , les bases d'ondelettes biorthogonales $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{\psi}_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constituent les bases des espace complémentaires de V_k et \tilde{V}_k dans V_{k-1} et \tilde{V}_{k-1} soit les espaces W_k et \tilde{W}_k

$$V_{k-1} = V_k \oplus W_k \quad \tilde{V}_{k-1} = \tilde{V}_k \oplus \tilde{W}_k$$

Les espaces ne sont pas orthogonaux à leur complément, mais au complément de l'espace dual. $V_k \perp \tilde{W}_k$ Et $\tilde{V}_k \perp W_k$ les conditions de biorthogonalité se traduisent

$$\langle \phi_{j,k}, \tilde{\phi}_{j,k'} \rangle = \delta_{k-k'} \quad \forall j, k, k' \in \mathbb{Z} \quad (1.19)$$

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,k'} \rangle = \delta_{k-k'} \quad \forall j, k, k' \in \mathbb{Z} \quad (1.20)$$

I.3.2 Transformée en ondelette rapide unidimensionnel

Soient deux analyses multi-résolution ou "AMR" duales l'une de l'autre et le système biorthogonal $(\phi, \tilde{\phi}, \psi, \tilde{\psi})$.

Toute fonction $f \in L^2$ peut être approchée aussi près que l'on veut par sa projection sur un sous-espace V_j suffisamment fin

$$\text{Proj}_{V_J} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{J,k} \phi_{J,k} \quad \text{Avec} \quad C_{J,k} = \langle f, \tilde{\phi}_{J,k} \rangle \quad (1.21)$$

Cette décomposition est unique on peut exploiter la relation

$$L^2 = \overline{V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus \dots}$$

Avec $j_0 \in \mathbb{Z}$ quelconque. Si $j_0 \prec j$, E_{j_0} est une base de Riesz pour L^2 on obtient la décomposition multi-échelle (unique)

$$\text{proj}_{V_0} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j_0,k} \phi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} W_{j,k} \quad (1.22)$$

Avec

$$C_{J,k} = \langle f, \tilde{\phi}_{J,k} \rangle \quad \text{Avec} \quad d_{J,k} = \langle f, \tilde{\psi}_{J,k} \rangle$$

Dans la pratique, les coefficients de la décomposition (1.22) ne sont pas calculés comme produits scalaires, mais par des convolutions-décimations successives à partir des coefficients de la décomposition (1.21). C'est l'algorithme de décomposition en ondelettes. Il utilise les formules :

$$C_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{l-2k} C_{j+1,l} \quad d_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{l-2k} C_{j+1,l} \quad (1.23)$$

Inversement, à partir des coefficients multi-échelle on calcule les coefficients à l'échelle fine j par l'algorithme de reconstruction. Il est basé sur la formule

$$C_{j+1,l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} C_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{l-2k} d_{j,k} \quad (1.24)$$

Ces deux algorithmes ont été introduits par S. Mallat. Ils s'inspirent du schéma de codage en sous-bandes, utilisé depuis longtemps en traitement du signal: on décompose un signal C_{j+1} en deux composantes, l'une qui contient les basses fréquences C_j , l'autre qui contient les hautes fréquences d_j . Par similarité le filtre h_0 est le filtre passe-bas, et le filtre h_1 est le filtre passe-haut. Pour la reconstruction, on utilise les filtres \tilde{h}_0 et \tilde{h}_1 . La figure 1.1 représente le schéma de codage.

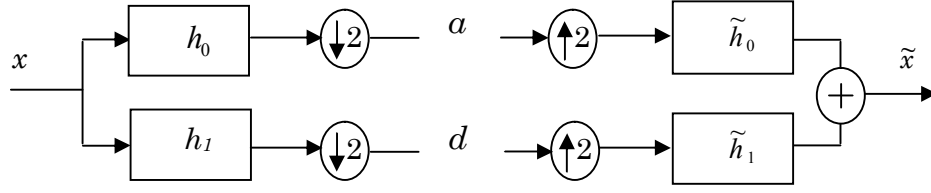


Figure 1.1. Banc de filtres d'analyse-synthèse.

Les conditions de reconstruction parfaite sont données par :

$$\begin{cases} h_0(z)\tilde{h}_0(z^{-1}) + h_1(z)\tilde{h}_1(z^{-1}) = 2 \\ h_0(z)\tilde{h}_0(-z^{-1}) + h_1(z)\tilde{h}_1(-z^{-1}) = 0 \end{cases}$$

I.3.3 Principe de décomposition et de reconstruction dans le cas de transformée 2-D

Nous présentons d'une façon générale dans les figures 1.2 et 1.3 le principe de décomposition et de reconstruction dans le cas de transformée 2-D [13].

La décomposition en ondelettes d'une image ($N \times N$) se déroule donc de la manière suivante :

- Dans un premier temps, chaque colonne de l'image 2-D est décomposée en utilisant verticalement les filtres 1-D. Cela produit deux images ($N \times N/2$), l'une correspondant aux basses fréquences verticales, l'autre aux hautes fréquences verticales.
- Dans un second temps, les mêmes filtres 1-D sont appliqués aux lignes des ces deux images. Chacune d'elle décomposée en deux nouvelles images ($N/2 \times N/2$), l'une correspondant aux basse fréquences horizontales, l'autre aux hautes fréquences horizontales.

Au total, quatre images (LL, HL, LH, HH) sont donc générées à chaque niveau de décomposition. La décomposition suivante effectue le même processus sur LL, correspondant aux basses fréquences horizontales et verticales.

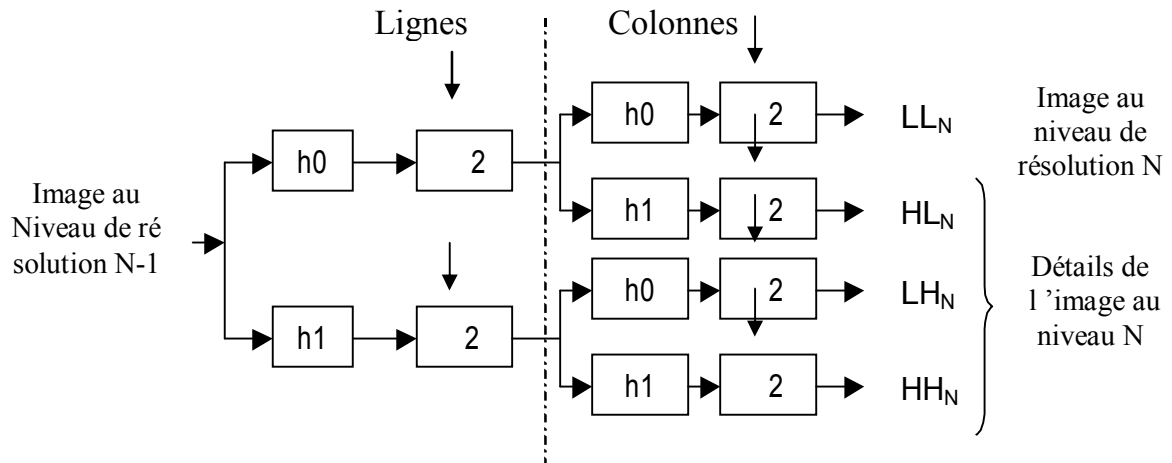


Figure 1.2 : Banc de filtres d'analyse pour la transformée en Ondelettes

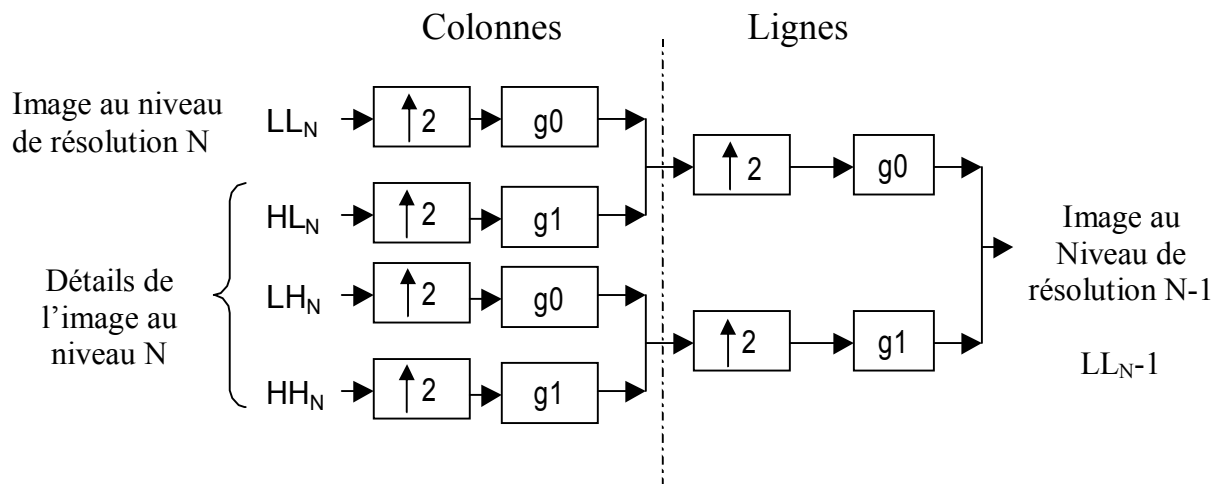


Figure 1.3 : Transformée en ondelettes inverse

I.4 Théorie du schéma lifting

Avec le schéma lifting, qui se présente comme un outil efficace pour la construction et l'implémentation de transformées en ondelettes, apparaît les ondelettes dites de «seconde génération», nous allons donc décrire le lifting comme une générale et flexible technique.

À l'origine, le but du schéma lifting, introduit par Sweldens [49], était de proposer un procédé de construction d'ondelettes biorthogonales dont les moments s'annulent pour des ordres de plus en plus élevés : “un ascenseur” (lift) vers de hauts moments nuls. C'est

une alternative intéressante au schéma de filtrage convolutif classique de la transformée, car elle est beaucoup moins complexe. En effet, le nombre d'opérations est divisé par un rapport allant jusqu'à deux en comparaison avec un schéma classique.

Parmi les avantages du lifting on peut citer :

- La possibilité de mettre en points des transformées en ondelettes sans passer par le domaine de fourrier
- Obtenir une complexité de calcul moindre et une implémentation plus simple et efficace.
- La possibilité de mettre en œuvre la transformée inverse, par contre dans le cas des ondelettes classiques il n'est pas évident que les filtres de synthèse soit exactement l'inverse des filtres d'analyse.

Le schéma lifting [6, 7, 20, 47, 49] s'effectue en trois étapes présentée dans la figure 1.4:

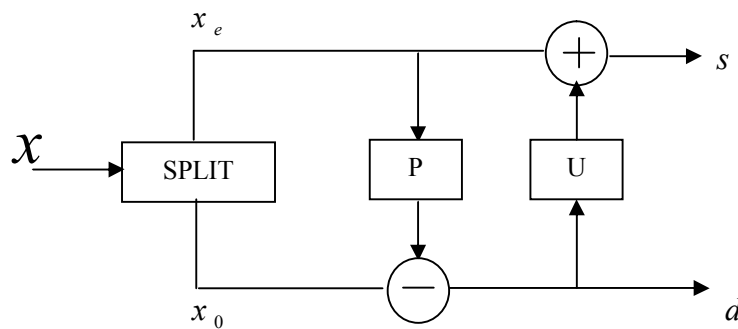


Figure 1.4. Principe du schéma lifting

1. Transformée polyphasée : Son mécanisme est simple .elle prend un signal en entrée, qu'elle le sépare en deux composantes polyphasés, les composantes pair et impair. Plus exactement, l'application de la transformée polyphasée au signal original x va la partitionner en deux sous-ensembles disjoints : x_e (l'ensemble des échantillons appartenant à x d'indice pair) et x_0 (l'ensemble des échantillons appartenant à x d'indice impair).cette séparation est aussi appelée "*Lazy Wavelet Transform*" ;

Transformée polyphasé : $x \rightarrow (x_e, x_0)$

2. Opération de prédiction : La plupart des signaux en imagerie présentent une structure de corrélation locale à la fois dans les domaines spatial et fréquentiel. En d'autres termes, les échantillons où les fréquences d'un même voisinage seront fortement corrélés tandis que les échantillons où les fréquences n'appartenant pas au même voisinage ne présenteront qu'un faible taux de corrélation. Si le signal x présente une telle structure, alors les deux sous-signaux x_e et x_0 seront fortement corrélés. Il en résulte la possibilité de prédire x_0 à partir de x_e . un opérateur P est appliquée au sous ensemble x_e afin de prédire x_0 . La différence d , entre x_0 et sa prédiction, constitue le détail du signal, autrement dit les coefficients d'ondelettes.

$$d = x_0 - P(x_e)$$

L'opération qui consiste à calculer la prédiction et mettre en mémoire le détail constitue Un pas lifting dual.

Ainsi la deuxième étape du schéma lifting nous ramène à :

$$\text{Pas lifting dual : } (x_e, x_0) \rightarrow (x_e, d)$$

3. Opération de mise à jour : Cette dernière étape est nécessaire afin d'acquérir une représentation basse fréquence du signal plus adéquate, et conserver certaines propriétés globales du signal original. Nous disposant de deux sous-ensembles : x_e et d . l'ensemble d obtenu par une opération assimilable à un filtrage passe haut plus un sous-échantillonnage. L'ensemble x_e est obtenu par un simple sous-échantillonnage ; ce signal s'étale sur toute la bande fréquentielle du signal original. Les conditions de shannon ne sont pas respectées, d'où la nécessité d'une troisième étape afin d'acquérir une représentation adéquate du signal basse fréquence : l'application d'un opérateur de mise à jour sur le signal détail. [52]

$$s = x_e + U(d)$$

Cette deuxième étape s'appelle un pas lifting.

$$\text{Pas lifting : } (x_e, d) \rightarrow (s, d)$$

I.4.1 Propriétés du schéma lifting

Calcul plus rapide : Le lifting permet d'exécuter les calculs sur place. En d'autres termes, le signal de sortie est codé sur le même emplacement mémoire que le signal d'entrée. Cette méthode permet de faire une économie importante au niveau de la mémoire.

Efficacité : Dans la plupart des cas le nombre d'opération est réduit par rapport à un filtrage indépendant des deux sous-bandes. En effet, le lifting calcule simultanément les bandes basse haute fréquences.

Réversible : La réalisation du schéma lifting inverse est triviale. Il s'obtient en inversant l'ordre des opérations et en les défaisant.

Généralité : La transformée est mise en œuvre sans la moindre référence au domaine de Fourier. L'extension du schéma à d'autres cadres d'applications en est extrêmement facilitée. [18]

I.4.2 Exemples linéaires**Ondelettes biorthogonales 5/3**

La structure en lifting de la transformation en ondelette 5/3 correspond intuitivement à la prédiction d'un échantillon pair par la moyenne de ces voisins et au rehaussement des échantillons impairs afin de préserver la moyenne courante du signal. Plus précisément, elle s'exprime par les relations suivantes :

$$h_k = x_{2k+1} - \frac{1}{2}(x_{2k} + x_{2(k+1)})$$

Pour faire la mise à jour en se servant des deux voisins là aussi, cela impose de prendre

$$l_k = x_{2k} + \frac{1}{4}(h_k + h_{k+1})$$

Là encore, cela équivaut à faire

$$h_k = x_{2k+1} - \frac{1}{2}(x_{2k} + x_{2(k+1)})$$

$$l_k = \frac{3}{4}x_{2k} + \frac{1}{4}(x_{2k-1} + x_{2k+1}) - \frac{1}{8}(x_{2k-2} + x_{2k+2})$$

Ce qui correspond aux ondelettes bi-orthogonales 5/3.

I.4.3 Conception d'ondelettes non-linéaires

Une des principales motivations pour créer ces ondelettes de seconde génération est, comme nous l'avons signalé auparavant, soit de pouvoir nous adapter à des contraintes

particulières, en terme d'espace de départ, ou d'espace d'arrivée - c'est le cas des ondelettes entières ou des ondelettes sur un intervalle - soit d'obtenir des ondelettes fondamentalement non-linéaires, dans la conception même des opérateurs de mise à jour et de prédiction.

I.4.3.1. Ondelettes entières

Une des difficultés des ondelettes est la difficulté d'en créer qui puissent conserver la nature entière des données, en particulier en vue de la compression sans perte.

Un des avantages du lifting est q'il existe une version entière du schéma .la version Entière utilise un opérateur d'arrondi qui permet de projeter une variable réelle sur un ensemble d'échantillons définis dans le domaine des entiers relatifs \mathbf{Z} .le schéma lifting sur les entiers est défini, par l'ensemble des équations :

$$\begin{cases} s^{(l)} = s^{(l-1)} - \left[U^l * d^{(l-1)} + \frac{1}{2} \right] \\ d^{(l)} = d^{(l-1)} - \left[P^l * s^l + \frac{1}{2} \right] \end{cases}$$

Pour l allant de 1 à L .

Avec

L : désigne le nombre de pas lifting.

Un des grands intérêts qu'offre cette opération est que le schéma reste réversible. Par conséquent, le schéma lifting sur les entiers est une transformée à reconstruction parfaite, qui traite des entiers et retourne des entiers .Ce type de transformée offre un intérêt notable au sein d'une chaîne de compression sans perte, et le filtrage par le lifting sur les entiers est non linéaire, même si les filtres P et U le sont. [18]

Le lifting n'est pas la seule transformée permettant de mettre au point une transformation inversible définie sur les entiers.

I.4.4 Correspondance entre schéma lifting et transformée en ondelettes première génération

Daubechies et sweldens ont établi la correspondance entre la transformée en ondelettes et le schéma lifting.

La première étape est l'application de la transformée polyphasée des deux bandes aux deux filtres de synthèse \tilde{h} et \tilde{g} .

La représentation polyphasée de \tilde{h} est donnée par :

$$\tilde{h}(z) = \tilde{h}_e(z^2) + z^{-1}\tilde{h}_o(z^2)$$

Avec

$$\tilde{h}_e(z) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \tilde{h}_{2k}(z).z^{-k} \quad \text{Et} \quad \tilde{h}_o(z) = \sum_{k=l_1}^{l_2} \tilde{h}_{2k+1}(z).z^{-k}$$

k_1, k_2, l_1, l_2 étant les degrés maximum et minimum de \tilde{h}_e et \tilde{h}_o , donnés par \tilde{h} .

De même pour \tilde{g} on a :

$$\tilde{g}(z) = \tilde{g}_e(z^2) + z^{-1}\tilde{g}_o(z^2)$$

Avec

$$\tilde{g}_e(z) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \tilde{g}_{2k}(z).z^{-k} \quad \text{Et} \quad \tilde{g}_o(z) = \sum_{k=l_1}^{l_2} \tilde{g}_{2k+1}(z).z^{-k}$$

Les représentations polyphasées de \tilde{h} et \tilde{g} nous permettent d'écrire la matrice polyphasée \tilde{P} sous la forme :

$$\tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{h}_e(z) & \tilde{g}_e(z) \\ \tilde{h}_o(z) & \tilde{g}_o(z) \end{bmatrix}$$

La représentation polyphasée (figure 1.5) de la transformée en ondelettes est obtenue par un sous-échantillonnage en éléments d'indices pair et impair, puis par l'application de la matrice polyphasée.

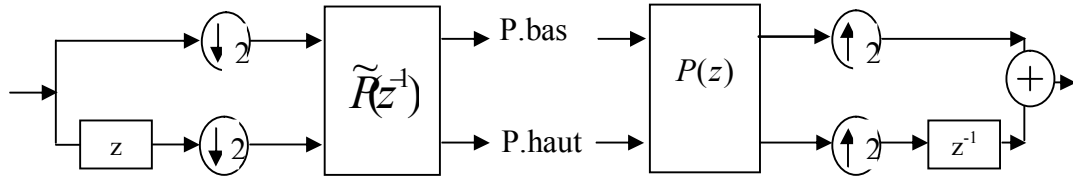


Figure 1.5 : Représentation polyphasée

Pour la reconstruction, nous appliquons la matrice polyphasée \tilde{P} puis, nous réunissons les éléments d'indices pair et impair. La propriété de reconstruction parfaite devient alors :

$$p(z)\tilde{P}^T(z^{-1}) = I$$

Soit

$$\begin{aligned} h_e(z) &= \tilde{g}_0(z^{-1}) & h_0(z) &= -\tilde{g}_e(z^{-1}) \\ g_e(z) &= -\tilde{h}_0(z^{-1}) & g_0(z) &= \tilde{h}_e(z^{-1}) \end{aligned}$$

La factorisation de la matrice polyphasée \tilde{p}^T conduit à une implémentation en schéma lifting des filtres h et g . les transformées en z des filtres polyphasés sont des polynômes de Laurent et n'appartiennent pas à un espace euclidien. La matrice polyphasée se factorise par l'application sur \tilde{h}_e et \tilde{h}_0 d'un algorithme « d'Euclide » étendu aux polynômes de laurent.

$$\begin{pmatrix} \tilde{h}_e(z) \\ \tilde{h}_0(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{M-1} \begin{pmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{L-1} \begin{pmatrix} 1 & q_{2i-1}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{2i}(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Les polynômes q_i , pour tout $i \in \{1, \dots, M-1\}$, sont les quotients successifs de la division, $(M-1)$ le nombre de divisions obtenues, $L-1 = \left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil$ et K et le dernier reste non nul. En se basant sur la décomposition de h , Le filtre complémentaire g^0 vérifiant :

$$\tilde{p}^0(z) = \prod_{i=1}^{L-1} \begin{pmatrix} 1 & q_{2i-1}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{2i}(z) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix}$$

Alors il existe un filtre s vérifiant :

$$\tilde{p}(z) = \tilde{p}^0(z) \times \begin{pmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

L'identification des termes de l'égalité (1.26) permet de trouver la fonction s , qui correspond à un pas lifting supplémentaire. Les matrices triangulaires supérieures représentent les pas "lifting", tandis que les triangulaires inférieures représentent les pas "lifting" duaux.

Posons:

$$\begin{aligned} u^{(i)}(z) &= q_{2i-1}(z) & p^{(i)}(z) &= q_{2i}(z) & \forall i \in \{1, \dots, L-1\} \\ u^{(L)}(z) &= K^2 s(z) & p^{(L)}(z) &= 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Le schéma lifting inverse se déduit des équations (1.27) et est déterminé par :

$$\tilde{p}(z) = \prod_{i=1}^L \begin{pmatrix} 1 & u^{(i)}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^{(i)}(z) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix}$$

Le schéma lifting est donné par la transposée de la matrice duale de \tilde{p} :

$$p^T(z^{-1}) = \begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \times \prod_{i=0}^{L-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p^{(L-i)}(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u^{(L-1)}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I.5 Deuxième génération

Les ondelettes de première génération sont un outil puissant et les domaines d'application sont nombreux. Néanmoins elles sont formulées dans le moule d'une analyse multirésolution, bien adapté dans un cadre théorique d'analyse fonctionnelle (bases inconditionnelles d'espaces fonctionnels, caractérisation d'espaces fonctionnels basée sur les coefficients de détail, *etc.*) mais trop restrictif dans certaines applications pratiques. Ces limitations proviennent essentiellement de :

- l'invariance par translation (uniformité), qui rend difficile ou impossible la création d'ondelettes sur des domaines autres que la droite réelle, comme par exemple la sphère, ou même tout simplement un intervalle de R ;
- l'invariance par changement d'échelle, qui revient à utiliser les mêmes filtres à tous les niveaux (stationnarité).

La notion d'*ondelettes de seconde génération* a été introduite pour palier ces problèmes et étendre le domaine d'application des techniques multirésolution. On ne trouve pas de définition précise de ce que sont les ondelettes de deuxième génération, mais la caractéristique fondamentale est de ne plus supposer que les fonctions d'échelle soient issues d'une seule et même fonction mère.

I.5.1 Application des ondelettes de seconde génération

Il existe de nombreuses applications utilisant les ondelettes de seconde génération, comme par exemple la compression, le débruitage ou encore l'analyse mathématique. Une première application reconnue des ondelettes de seconde génération (de type géométrique), est dans la construction et la transmission progressive de grandes scènes virtuelles. Ainsi, l'application *Wavier* permet la visualisation de terrains virtuels, par mode de transmission scalable. Cette application est détaillée dans [3] et [4].

Gortler *et al.* [12] se sont penchés sur l'effet de la réflexion de la lumière sur les objets virtuels. Ce phénomène est appelé *radiosité* (traduction directe du terme anglais "Radiosity"). Autrement appelée illumination, le but recherché est d'obtenir une réflexion diffuse de la lumière et un effet glacé qui apporte du réalisme à la scène pour des objets virtuels. Les méthodes classiques de transport de la lumière approximent l'équation intégrale de la radiosité, en projetant la fonction inconnue dans une base composée d'un ensemble de n équations linéaires et à support limité. Cette opération engendre n équations linéaires où n est le nombre d'éléments discret de la scène. Ces méthodes nécessitent généralement la résolution de n^2 coefficients d'interaction. Afin de réduire ce nombre de coefficients, les efforts ont amené à augmenter l'ordre des fonctions de la base d'analyse, à utiliser les maillages ainsi qu'un modèle hiérarchique. Finalement, le nombre de coefficients d'interaction à calculer devient un équivalent en $O(n)$. Les auteurs proposent de projeter cette fonction de radiosité dans une base de fonctions d'ondelette, et introduisent également la base d'ondelettes "flatlet". [52]

I.5.2 Transformées dérivées des ondelettes

Plutôt que d'exploiter les dépendances dans la transformée en ondelettes avec des codeurs complexes, une autre approche consiste à en chercher les sources afin de les éliminer. La transformée en ondelettes est optimale pour la représentation de singularités ponctuelles. Malheureusement, dans les images, la plupart des singularités rencontrées sont des contours [8] et le schéma de transformée en ondelettes séparable n'est pas adapté à la représentation de ces contours. Les seules directions bien appréhendées sont les directions horizontales et verticales. Beaucoup de coefficients d'ondelettes de forte amplitude sont nécessaires à la représentation des contours obliques. Afin de représenter ces contours avec plus de parcimonie, de nouvelles transformées dérivées des ondelettes ont été proposés. Ont listé les propriétés recherchées :

1. *la multirésolution* ;
2. *la localisation* spatiale et fréquentielle des éléments de base ;
3. *l'échantillonnage critique* ;
4. *la multi-directionnalité* : les éléments de base doivent être orientés dans de multiples directions ;
5. *l'anisotropie* : les éléments de base doivent être plus ou moins allongés.

La transformée en ondelettes possède déjà les trois premières propriétés.

Les curvelettes

La première génération des curvelettes [8] est construite à partir d'une décomposition en sous-bandes de l'image, d'un partitionnement par blocs de ces sous-bandes avec une taille de bloc dépendant de la sous-bande, et de la transformée en ridgelettes [10] de ces blocs. La transformée en ridgelettes consiste en une transformée de Radon suivie d'une transformée en ondelettes 1D. La décomposition en sous-bandes et le partitionnement par blocs permettent la localisation fréquentielle et spatiale ainsi que la multirésolution et la transformée de Radon permet la multi-directionnalité. Les contours mis en évidence dans les sous-bandes hautes fréquences sont détectés dans toutes les directions par la transformée de Radon et représentés de façon parcimonieuse grâce à la transformée en ondelettes 1D.

La seconde génération des curvelettes [9] est définie directement à partir d'une fonction d'échelle φ et d'une forme d'onde γ .

Les contourlettes

A l'inverse des curvelettes, les contourlettes sont construites directement dans le domaine discret [14]. L'image est décomposée dans une pyramide Laplacienne qui permet l'analyse multirésolution. Ensuite, un banc de filtres directionnels est utilisé sur chacun des niveaux de la pyramide ce qui permet l'analyse multi-directionnelle. La pyramide Laplacienne introduit un facteur de redondance de 4/3.

Les bandelettes

Contrairement aux transformées en curvelettes et en contourlettes qui sont des transformées à bases fixes et qui ne dépendent donc pas de l'image, les transformées en bandelettes sont des transformées à bases adaptées [34, 26]. Elles nécessitent donc l'envoi d'une information supplémentaire pour signaler le choix qui a été fait.

Pour la première génération de la transformée en bandelettes l'image est d'abord divisée en régions contenant chacune un *flot géométrique* parallèle. Ces régions sont régulières le long des lignes de flot. Autour d'un contour, le flot est parallèle aux tangentes de la courbe du contour.

La seconde génération de bandelettes ne suit pas le même raisonnement. Cette nouvelle transformée en bandelettes est construite au-dessus d'une transformée en ondelettes 2D. L'objectif de ces bandelettes est d'exploiter les régularités géométriques le long des contours dans les sous-bandes de la transformée en ondelettes.

Pour cela, une approximation polynomiale est effectuée sur des bandes qui suivent la géométrie.

I.6 Conclusion

La transformation en ondelettes est un outil capable de donner une représentation multi- résolution d'un signal monodimensionnel, elle a connu un succès important dans des domaines d'application différentes comme par exemple le traitement de l'image et du signal, la compression et la transmission de données, les solutions numériques des équations différentielles et intégrales.... La raisons de succès de la transformation en ondelettes c'est que pour une classe de fonctions, la majeure partie de l'information contenue dans la fonction est concentrée dans un petit nombre de coefficients d'ondelettes.

Dans le cas de signaux multidimensionnels comme les images, il est possible de construire des bases d'ondelettes séparables par produit tensoriel. Cependant, ces dernières possèdent un support carré indéformable et sont isotropes : pour ces raisons, elles ne peuvent pas représenter de manière optimale les régions d'une image comportant des contours ou des singularités locales. Afin de pallier à cet inconvénient, de nombreuses bases d'ondelettes anisotropes (Curvelets, Contourlets, Bandelettes, Ondelettes orientées...) ont alors été proposées pour permettre une représentation plus économique des images.

En parallèle, la découverte de la structure lifting a permis de construire simplement des transformées multirésolution, toujours inversibles et autorisant la mise en oeuvre d'opérateurs non-linéaires capables de saisir les singularités d'un signal. De plus, Le schéma lifting permet d'implémenter la transformée en ondelettes de manière plus efficace, en réduisant le nombre d'opérations arithmétiques. Le schéma lifting servent à mettre en oeuvre les transformées directe et inverse sans passer par le domaine de fourier.